

# Der Maxwell'sche Spannungstensor in Vakuum und Materie

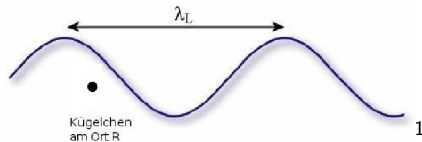
Benjamin Fries

26. April 2011

# Verknüpfung mit vorherigem Vortrag

Grenzfälle der Größenordnung bei der optischen Pinzette:

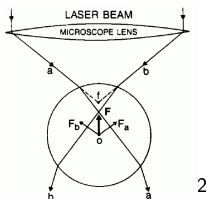
- Rayleigh-Regime: Punkt-Dipol (Objekt sehr klein gegen Wellenlänge)



<sup>1</sup>Grafik: A. Langendörfer: Arbeit zur Zulassung zum ersten Staatsexamen, S. 13 (2009)

# Verknüpfung mit vorherigem Vortrag

- Strahlenoptik (Objekt sehr groß gegen Wellenlänge)



In diesem Vortrag exakte Berechnung von elektromagnetischen Kräften für jede Größe der Teilchen (relativ zur Wellenlänge)

<sup>2</sup>Grafik: A. Ashkin: Biophys. J. 61, 569 (1992)

# Gliederung

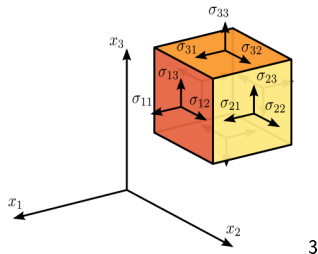
- 1 In Vakuum
  - Spannungstensor im Allgemeinen
  - Maxwell'scher Spannungstensor
  - Spannungstensor, Impuls und Drehimpuls
  - Energie-Impuls-Tensor
- 2 In Materie
  - Problemstellung
  - Abraham-Minkowski-Kontroverse
  - Beispiel-Kraftdichten
  - Auflösung des Dilemmas
- 3 Zusammenfassung

# Funktion

- Allgemeiner Spannungstensor aus Kontinuumsmechanik bekannt
- Beschreibt Kraft auf einen bestimmten Punkt, zum Beispiel im Festkörper

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

# Bedeutung



3

- $\sigma_{ij}$  ist die Spannung (Kraft pro Fläche) in Richtung  $\hat{x}_j$  auf die Fläche mit Normalenrichtung  $\hat{x}_i$ .
- Diagonalelemente sind Druck- und Zugspannungen.
- Nebendiagonalelemente sind Scherspannungen.

<sup>3</sup>Grafik: [http://en.wikipedia.org/wiki/File:Stress\\_transformation\\_3D.svg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Stress_transformation_3D.svg)

# Funktion

Mechanische Spannung auf eine Ladungs- und Stromverteilung durch ein elektromagnetisches Feld ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ )

## Vorschau

$$T_{ij} = \epsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - \delta_{ij} \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right)$$

# Herleitung

Lorentzkraft auf eine Punktladung  $q$  mit Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{F} = (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) q$$

Lorentzkraft auf eine Ladungs- und Stromverteilung im Volumen  $V$ :

$$\mathbf{F} = \int_V (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \rho dV = \int_V (\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}) dV$$

Kraft pro Volumen (Kraftdichte) also:

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$



# Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4)$$

# Herleitung

Mit den Maxwell-Gleichungen (1) und (4)  $\rho$  bzw.  $\mathbf{j}$  ersetzen:

$$\mathbf{f} = \overbrace{\varepsilon_0 (\nabla \cdot \mathbf{E})}^{=\rho} \mathbf{E} + \overbrace{\left( \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)}{=\mathbf{j}} \times \mathbf{B}$$

- Produktregel:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right) + \left( \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$$

- Mit Maxwell-Gleichung (2) und umstellen:

$$\underline{\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B}} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})$$

Oben einsetzen ...

# Herleitung

... und wir sind hier:

$$\mathbf{f} = \varepsilon_0 [(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})] +$$

$$\frac{1}{\mu_0} [ \quad - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) ]$$

$$- \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

- Ergänze symmetrischen Term  $(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}$  dank  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ .
- Verwende für  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  je

$$\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \frac{1}{2} \nabla (E^2) - (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E}.$$

# Herleitung

Damit neue Schreibweise der Kraftdichte  $\mathbf{f}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{f} = & \varepsilon_0 [(\nabla \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla)\mathbf{E}] + \frac{1}{\mu_0} [(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}] \\ & - \frac{1}{2} \nabla \left( \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \\ & - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \end{aligned}$$

# Herleitung

Kraftdichte  $\mathbf{f}$  lässt sich schreiben mit Divergenz von  $\mathbf{T}$  und dem Poynting-Vektor  $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$ :

$$\mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{T} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t}$$

(Dabei ist der Vektor  $(\nabla \cdot \mathbf{T})_j \equiv \sum_{i=1,2,3} \partial_i T_{ij}$ .)

# Definition

Zur Vereinfachung Einführen des Maxwell'schen Spannungstensors (*Maxwell stress tensor*)  $\mathbf{T}$ :

## Definition

$$T_{ij} \equiv \epsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - \delta_{ij} \underbrace{\frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right)}_{=w, \text{ Energiedichte}}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{T} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} \otimes \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} - w \mathbb{1}$$

# Gesamtkraft

Gesamtkraft auf eine Ladungsverteilung in  $V$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int_V \mathbf{f} dV = \int_V \nabla \cdot \mathbf{T} dV - \epsilon_0 \mu_0 \int_V \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} dV \\ &= \oint_{\partial V} \mathbf{T} \cdot d\mathbf{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{S} dV \end{aligned}$$

Bei optischen Frequenzen ist nur das zeitliche Mittel  $\langle \mathbf{S} \rangle$  relevant – das ist zeitlich konstant. Die Kraft wird also nur durch den Spannungstensor  $\mathbf{T}$  auf der Oberfläche  $\partial V$  bestimmt.

# Impulserhaltung, integral

2. Axiom von Newton:  $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}_{mech}}{dt}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \oint_{\partial V} \mathbf{T} \cdot d\mathbf{A} &= \frac{d\mathbf{p}_{mech}}{dt} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{S} dV \\ &\equiv \frac{d}{dt} \int \tilde{\mathbf{p}}_{mech} dV + \frac{d}{dt} \int \tilde{\mathbf{p}}_{em} dV = \frac{d}{dt} \mathbf{p}_{ges} \end{aligned}$$

mit Impulsdichten  $\tilde{\mathbf{p}}_{mech/em}$  für mechanischen Impuls der Ladung und elektromagnetischen Impuls des Feldes.

## Neuigkeit

Elektromagnetisches Feld hat nicht nur Energie, sondern auch Impuls.



# Impulserhaltung, differentiell

## Differentielle Form der Impulserhaltung

$$\frac{\partial}{\partial t} (\tilde{\mathbf{p}}_{mech} + \tilde{\mathbf{p}}_{em}) = \nabla \cdot \mathbf{T}$$

Dies ist eine Kontinuitätsgleichung wie

- für Ladung mit der Stromdichte  $\mathbf{j}$  und
- für Energie mit dem Poynting-Vektor  $\mathbf{S}$  (Energieflussdichte).

$\mathbf{T}$  ist also die Impulsflussdichte (aber Tensor, weil Impuls Vektor).

# Drehmoment und Drehimpuls

Im einfachsten Fall heben sich die angreifenden Scherkräfte (Nebendiagonalelemente von  $\mathbf{T}$ ) gegenseitig auf. Mangelt es dem System aber an Symmetrie, liegt insgesamt ein Drehmoment an.

## Neuigkeit

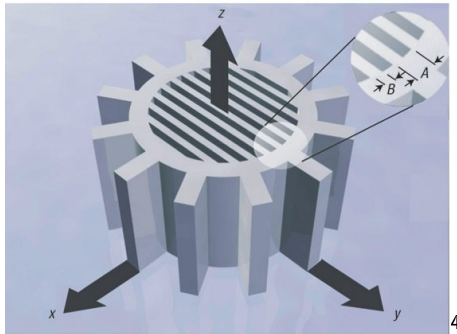
Elektromagnetische Felder besitzen auch Drehimpuls mit Drehimpulsdichte

$$\tilde{\mathbf{L}}_{em} = \mathbf{r} \times \tilde{\mathbf{p}}_{em} = \mathbf{r} \times [\epsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B})].$$

Selbst völlig statische Felder können einen Impuls oder Drehimpuls besitzen, wenn  $(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \neq 0$ .

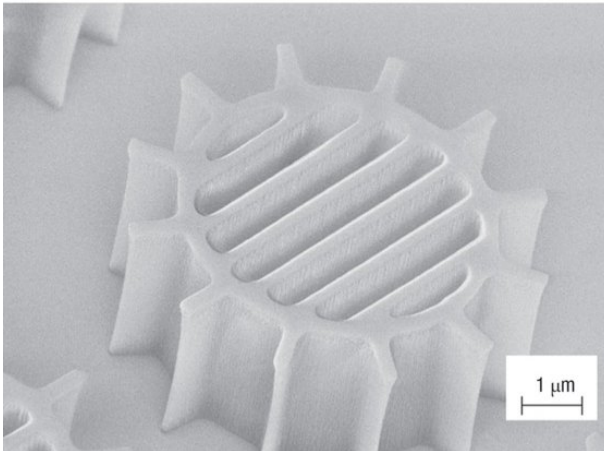
# Beispiel-Experiment

Drehimpulsübertragung durch effektiv doppelbrechende Gitterstruktur (Video)



<sup>4</sup>Grafik: S. L. Neale et al.: Nature Materials 4, 530 (2005)

# Beispiel-Experiment



<sup>5</sup>Grafik: S. L. Neale et al.: Nature Materials 4, 530 (2005)

# Energie-Impuls-Tensor

Spezielle und Allgemeine Relativitätstheorie:  
Maxwell'scher Spannungstensor  $(T_{ij})$  in  $(T^{\alpha\beta})$  enthalten

## Energie-Impuls-Tensor

$$(T^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} w & \frac{S_1}{c} & \frac{S_2}{c} & \frac{S_3}{c} \\ \frac{S_1}{c} & -T_{11} & -T_{12} & -T_{13} \\ \frac{S_2}{c} & -T_{21} & -T_{22} & -T_{23} \\ \frac{S_3}{c} & -T_{31} & -T_{32} & -T_{33} \end{pmatrix}$$

- mit der Energiedichte  $w$ ,
- dem Poynting-Vektor  $\mathbf{S}$  und
- der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit  $c$

# Energie-Impuls-Erhaltung

Übrigens:

Die Energie-Impuls-Erhaltung lässt sich damit schreiben als:

$$\nabla_{\alpha} T^{\alpha\beta} = 0$$

# Einführung

In vielen Fällen kann man Gleichungen vom Vakuum in Materie überführen, indem man nur  $\epsilon_0$  durch  $\epsilon_0 \epsilon_r$  ersetzt (dasselbe mit  $\mu_r$ ).

## Beispiel

Kapazität eines Plattenkondensators:

$$C = \epsilon_0 \cdot A/d \rightarrow C = \epsilon_0 \epsilon_r \cdot A/d$$

Beim Impuls nicht so einfach, weil sehr grundlegende Größe

# Mikroskopische Maxwell-Gleichungen

- Vorhin: Herleitung von  $\mathbf{T}$  mit den Maxwell-Gleichungen in Vakuum
- Maxwell-Gleichungen in Vakuum gelten für große und kleine Längen
- In Materie müsste man aber jede einzelne Ladung einbeziehen: zu kompliziert.



# Makroskopische Maxwell-Gleichungen

- Durch Mittelung über viele Atome entstehen die Maxwell-Gleichungen in Materie.
- Diese sind deshalb makroskopisch und nicht mehr auf atomarer Ebene anwendbar.
- So auch  $\epsilon_r$  und  $\mu_r$ , ebenfalls makroskopisch

# Beginn der Kontroverse

Erster Vorschlag für Energie-Impuls-Tensor in Materie:

- Minkowski 1908, Photon:  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \cdot n$

Offensichtliche Mängel führen zu vielen weiteren Vorschlägen, etwa von

- Einstein und Laub 1908
- Abraham 1909, Photon:  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0/n$

Kontroverse versucht richtigen Tensor zu finden

# Abraham- und Minkowski-Tensor

Abraham:

$$(T)_{Abr} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) & \left(\frac{1}{c}\mathbf{E} \times \mathbf{H}\right)^T \\ \frac{1}{c}\mathbf{E} \times \mathbf{H} & -\mathbf{E} \otimes \mathbf{D} - \mathbf{H} \otimes \mathbf{B} + \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B})\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

Minkowski:

$$(T)_{Min} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) & \left(\frac{1}{c}\mathbf{E} \times \mathbf{H}\right)^T \\ \frac{1}{c}\mathbf{D} \times \mathbf{B} & -\mathbf{E} \otimes \mathbf{D} - \mathbf{H} \otimes \mathbf{B} + \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B})\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

- Unterschied nur in Vektor linksunten,  $(T^{10}, T^{20}, T^{30})$
- Bei Minkowski  $(T^{10}, T^{20}, T^{30}) \neq (T^{01}, T^{02}, T^{03}) \Rightarrow$  nicht relativistisch invariant

# Theoretische Argumente

## Dilemma

### Starke Argumente für Minkowski als auch Abraham

Für Minkowski:

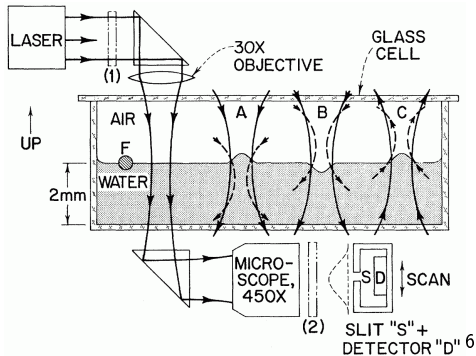
- Rückstoß von absorbierenden und emittierenden Atomen im Medium
- Beugungserscheinungen

Für Abraham:

- 1. Newton'sches Axiom: Trägheitsgesetz

# Experimente zur Unterscheidung

Zum Beispiel Versuch von Ashkin und Dziedzic



<sup>6</sup>Grafik: A. Ashkin und J. M. Dziedzic: Phys. Rev. Lett. 30, 139 (1973)

# Experimente zur Unterscheidung

Frühe Rechnung sagte: Wölbung geht

- nach oben, falls Minkowski richtig (Versuchsergebnis)
- nach unten, falls Abraham richtig

Tatsächlich so keine Unterscheidung möglich

## Dilemma

Widersprüchliche Ergebnisse von anderen Experimenten

# Ladungs-Kraftdichte

Betrachten einfache Kraftdichten zur Verdeutlichung des Dilemmas

Zunächst Medium mit einzelnen Ladungsträgern

Lorentz-Kraftdichte:

$$\mathbf{f}^L = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

Verschiebungs- und Polarisationsfeld  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{P}$ :

$$\mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{D}}_{=0} - \nabla \cdot \mathbf{P} = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} \stackrel{(1)}{=} \rho$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho$$

# Ladungs-Kraftdichte

Ähnlich herleitbar:

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{P}} = \nabla \cdot \mathbf{j} \quad \rightarrow \quad \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{j}$$

$\rho$  und  $\mathbf{j}$  in  $\mathbf{f}^L$  ergibt Kraftdichte für einzelne Ladungen:

$$\mathbf{f}^c \equiv -(\nabla \cdot \mathbf{P}) \cdot \mathbf{E} + \dot{\mathbf{P}} \times \mathbf{B}$$



# Dipol-Kraftdichte

Kraft auf einen einzelnen Punkt-Dipol (ein Atom):

$$\mathbf{F} = (\mathbf{d} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{E} + \dot{\mathbf{d}} \times \mathbf{B}$$

Kraftdichte für Dipol am Ort  $\mathbf{R}$ :

$$\mathbf{f}^{spd}(\mathbf{r}) = \left( (\mathbf{d} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \dot{\mathbf{d}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \right) \cdot \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R})$$

Polarisation als Dipoldichte:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{d}_i \cdot \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i)$$

Damit Kraftdichte für einzelne Punktdipole:

$$\mathbf{f}^d \equiv (\mathbf{P} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{E} + \dot{\mathbf{P}} \times \mathbf{B}$$

# Vorhersage für einzelnen Dipol

Einzelner Dipol als Polarisation:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \mathbf{d} \cdot \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R})$$

Kraftdichten dafür:

$$\mathbf{f}^c = -(\mathbf{d} \cdot \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R})) \cdot \mathbf{E} + \dot{\mathbf{d}} \times \mathbf{B} \cdot \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R})$$

$$\mathbf{f}^d = \left( (\mathbf{d} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{E} + \dot{\mathbf{d}} \times \mathbf{B} \right) \cdot \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R})$$

# Vorhersage für einzelnen Dipol

Vorhersagen für Kraft auf Dipol:

$$\mathbf{F}^d = \int dV \mathbf{f}^d = (\mathbf{d} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{E} + \dot{\mathbf{d}} \times \mathbf{B}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^c &= \int dV \mathbf{f}^c \stackrel{\text{p. Int.}}{=} - \int dV \mathbf{E} \cdot (\mathbf{d} \cdot \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R})) + \dot{\mathbf{d}} \times \mathbf{B} \\ &= (\mathbf{d} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{E} + \dot{\mathbf{d}} \times \mathbf{B} \\ &= \mathbf{F}^d \end{aligned}$$

Vorhersagen gleich trotz verschiedener Kraftdichten

- Kraftdichten gleichwertig in dieser Situation
- Probleme nur in Einzelfällen

# Grundsätzliche Auflösung

Dilemma gelöst von

- Penfield und Haus 1967 sowie
- de Groot und Suttorp 1972

## Auflösung

- Tensoren von Abraham und Minkowski sind äquivalent
- Gesamter Energie-Impuls-Tensor willkürlich aufteilbar in elektromagnetischen und Materie-Teil

$$(T)^{total} = (T)^{mat} + (T)^{em}$$

Lange aber nicht als Lösung bekannt geworden

# Lösungsvorschlag von Barnett

Barnett 2010:

- Abraham-Tensor beschreibt kinetischen Impuls.
- Minkowski-Tensor beschreibt kanonischen Impuls.

$$\begin{aligned}
 (T)_{kin}^{total} &= (T)_{kin}^{mat} + (T)_{Abr}^{em} \\
 = (T)_{can}^{total} &= (T)_{can}^{mat} + (T)_{Min}^{em}
 \end{aligned}$$

# Zusammenfassung

- Berechnung von elektromagnetischen Kräften mit dem Maxwell'schen Spannungstensor möglich
- Elektromagnetisches Feld besitzt neben Energie auch Impuls und Drehimpuls
- Aufteilung in elektromagnetischen und Material-Tensor ist willkürlich (Lösung der Abraham-Minkowski-Kontroverse)

## Weiterführende Literatur und Quellen

- Griffiths, D. J.: *Introduction to electrodynamics, 3rd edition*, 1999, Prentice Hall, New Jersey, Kapitel 8.2.2–8.2.4
- Pfeifer, R. N. C. et al.: *Colloquium: Momentum of an electromagnetic wave in dielectric media*, 2007, Rev. Mod. Phys. **79**, 1197
- Barnett, S. M. und R. Loudon: *The enigma of optical momentum in a medium*, 2010, Phil. Trans. R. Soc. A **368**, 927
- Barnett, S. M. und R. Loudon: *On the electromagnetic force on a dielectric medium*, 2006, J. Phys. B **39**, S671
- Barnett, S. M.: *Resolution of the Abraham-Minkowski Dilemma*, 2010, Phys. Rev. Lett. **104**, 070401