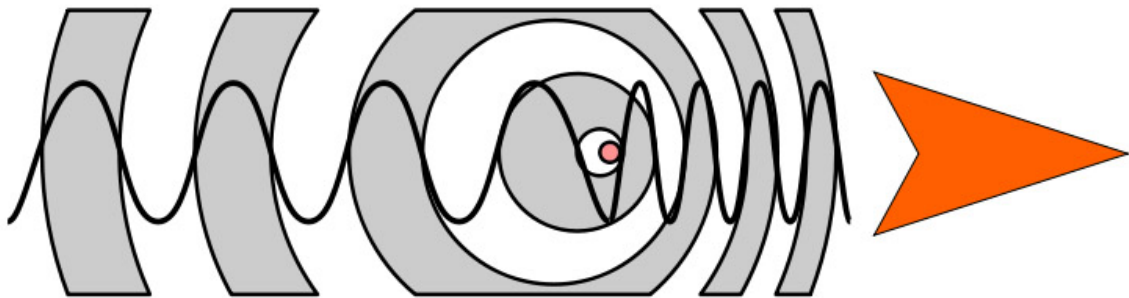


Benjamin Fries

Facharbeit

Experimente zum akustischen Dopplereffekt



am Gymnasium an der Heizenwies
Idar-Oberstein

im Leistungskurs Physik 12
des Schuljahres 2006/07

betreut durch Thomas von Kowalkowski

Abgabe am 20.04.2007

Inhalt

1 Einführung.....	3
1.1 Alltag und Weltall.....	3
1.2 Entdeckung	3
2 Das frontale Passieren.....	4
2.1 Einleitung.....	4
2.2 Theoretische Herleitung.....	4
2.3 Praktische Bestätigung	7
3 Das versetzte Passieren	16
3.1 Einleitung.....	16
3.2 Theoretische Herleitung.....	16
3.3 Praktische Bestätigung (nicht erfolgt)	25
4 Kurzfassung	26
5 Anhang.....	27
5.1 Näheres zur verwendeten Software	27
5.2 Messreihen.....	27
Erklärung über die selbstständige Anfertigung der Arbeit	31

¹ Titelgrafik: http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Doppler_effect_diagrammatic.svg, 13.06.2006, horizontal gespiegelt

1 Einführung

1.1 Alltag und Weltall

Der Doppler-Effekt bezeichnet die Stauchung bzw. Streckung von Wellen jeglicher Art bei einer Relativbewegung von Beobachter und Verursacher (bzw. Reflektor, wird in dieser Arbeit nicht weiter angesprochen). Er ist ein physikalisches Phänomen, das aus dem Alltag bekannt ist – zum Beispiel durch die Tonhöhenänderung des Martinshorns eines vorbeifahrenden Polizeiautos. Und trotzdem diente er lange Zeit als Erklärung für etwas völlig Alltagsfernes, für die Rotverschiebung des Lichts der meisten Galaxien, durch die die Expansion des Universums erkannt wurde. (Heute wird ein ähnlicher, aber relativistischer Effekt als Ursache für die Rotverschiebung angenommen.)² Zudem wird der Dopplereffekt bei der Suche nach extrasolaren Planeten verwendet.³

Die technische Anwendung des Dopplereffekts ist zum ersten Mal vor 50 Jahren⁴ in Form der klassischen „Radarfalle“ zur Geschwindigkeitsüberwachung im öffentlichen Straßenverkehr in unser tägliches Leben eingezogen.⁵ Beim Radar handelt es sich um elektromagnetische Wellen. Außerdem nutzt man den Effekt bei Schallwellen zur Geschwindigkeitsbestimmung des Blutflusses in menschlichen Gefäßen.⁶

In dieser Facharbeit beschäftige ich mich mit den Grundlagen des *akustischen* Dopplereffekts.

1.2 Entdeckung

Im Jahr 1842 sagte der Österreicher CHRISTIAN DOPPLER (1803–1853)⁷ den nach ihm benannten Effekt voraus, womit er die unterschiedlichen Farben der Sterne begründen wollte, was sich später jedoch als falsch herausstellte. Drei Jahre danach wies BUYS-BALLOT den akustischen, weitere drei Jahre später FIZEAU den optischen Dopplereffekt nach.⁸

² Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Expansion_des_Weltalls, Stand: 18.01.2007

³ Quelle: <http://www.steinvonrosette.de/bibl.doppler6.htm>, 22.01.2007

⁴ Quelle: <http://www.welt.de/data/2007/01/03/1164451.html>, 22.01.2007

⁵ Quelle: <http://de.wikipedia.org/wiki/Geschwindigkeits%C3%BCberwachung>, 18.01.2007

⁶ Quelle: <http://de.wikipedia.org/wiki/Sonographie#Doppler-Verfahren>, 18.01.2007

⁷ Quelle: Bader, Franz: Dorn-Bader Physik Sek II Gymnasium Gesamtband. Hannover, 2000, S. 326

⁸ Quelle: <http://de.wikipedia.org/wiki/Dopplereffekt>, 22.01.2007

2 Das frontale Passieren

2.1 Einleitung

Beim frontalen Passieren bewegt sich entweder der Verursacher oder der Beobachter einer Welle frontal auf den anderen zu, oder beide bewegen sich relativ zum Medium sowie frontal zueinander. Nach dem Moment des Passierens entfernen sich beide natürlich wieder. Frontal bedeutet, der Geschwindigkeitsvektor des bewegten bzw. schnelleren Parts hat immer dieselbe Richtung wie der Verbindungsvektor von Verursacher und Beobachter, woraus folgt, der kleinste Abstand der beiden während des Vorgangs ist Null. Davon ist das versetzte Passieren zu unterscheiden, bei dem der kleinste Abstand größer als Null ist, siehe 3 *Das versetzte Passieren*.

Durch die Konstanz der Relativgeschwindigkeit bei konstanter Absolutgeschwindigkeit ist auch die Dopplerverschiebung vor bzw. nach dem Moment des Passierens jeweils gleichbleibend. Im Moment des Passierens ändert die Dopplerverschiebung jedoch abrupt das Vorzeichen.

2.2 Theoretische Herleitung

Ruhen der Verursacher und der Beobachter einer Welle, wird exakt die ausgesandte Frequenz gemessen. Beim Dopplereffekt sind unabhängig von der Art der Welle drei Fälle zu unterscheiden:

1. Der Verursacher bewegt sich, während der Beobachter ruht.
2. Der Verursacher ruht, während sich der Beobachter bewegt.
3. Verursacher und Beobachter bewegen sich beide.

Da diese Arbeit den Dopplereffekt in der Akustik behandelt, wird der Verursacher im Folgenden auch Schallquelle oder Sender genannt und der Beobachter Empfänger. Als Medium wird ruhende Luft angenommen, die Formeln gelten jedoch mit der entsprechenden Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen auch für andere Medien. Alle Geschwindigkeiten sind relativ zum Medium gemeint.

2.2.1 Schallquelle bewegt, Empfänger in Ruhe⁹

Zwei aufeinanderfolgende Wellenberge haben durch die Bewegung der Schallquelle nicht wie bei ruhendem Sender den Abstand einer Wellenlänge λ der ausgesandten Frequenz f , denn dieser ist vor der Quelle um die Strecke $s = v T$ verkürzt (vgl. Abb. 2.2.1 Beobachter B₁) und um denselben Betrag hinter ihm verlängert (siehe B₂). Für die Wellenlänge λ' vor dem Sender gilt also:

$$\lambda' = \lambda - s = \lambda - v T = c / f - v / f \quad (2.2.1)$$

$$\text{und } \lambda' = c / f'$$

Durch Gleichsetzen und Umformen erhält man die Dopplerfrequenz f' für den Fall, dass der Empfänger ruht und sich die Schallquelle bewegt:

$$\begin{aligned} \frac{c}{f'} &= \frac{c-v}{f} \Leftrightarrow \frac{1}{f'} = \frac{1-\frac{v}{c}}{f} \\ \Rightarrow f' &= f \frac{1}{1-\frac{v}{c}} \end{aligned}$$

In dieser Formel, die für die Annäherung des Senders an den Empfänger gilt, ist stets der Betrag von v einzusetzen; es ergibt sich immer eine positive Dopplerverschiebung ($f' - f$). Für die Formel zum Entfernen der Quelle vom Empfänger ersetzt man das Minuszeichen durch ein Plus; damit liegt die Dopplerfrequenz in jedem Fall unter der ursprünglichen Frequenz.

Bewegt sich eine Schallquelle mit einer Geschwindigkeit $> c$, erzeugt dies einen sogenannten machschen Kegel (benannt nach ERNST MACH, 1838–1916¹⁰) mit der Quelle an der Spitze, der aus der Hülle aller Wellenberge gebildet wird (vgl. Abb. 2.2.2); jene verstärken sich an dieser Stelle gegenseitig. An der Oberfläche des Mach-Kegels (den die Schallquelle hinter sich her zieht) hört man daher einen Überschallknall.¹¹

⁹ Abschnitt sinngemäße Übernahme aus Bader, Franz: Dorn-Bader Physik Sek II Gymnasium Gesamtband. Hannover, 2000, S. 326

¹⁰ Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Ernst_Mach, 28.03.2007

¹¹ Vgl. Bader, Franz: Dorn-Bader Physik Sek II Gymnasium Gesamtband. Hannover, 2000, S. 327

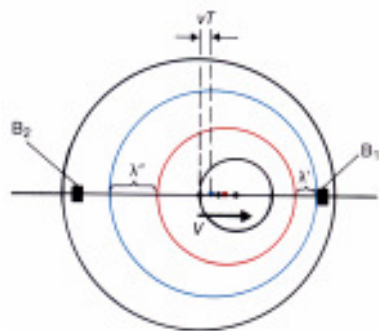


Abbildung 2.2.1¹²

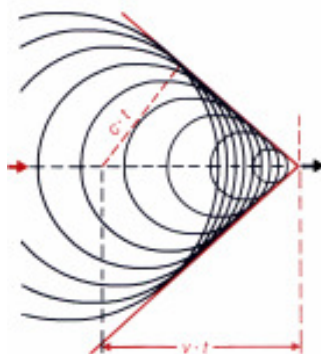


Abbildung 2.2.2¹²

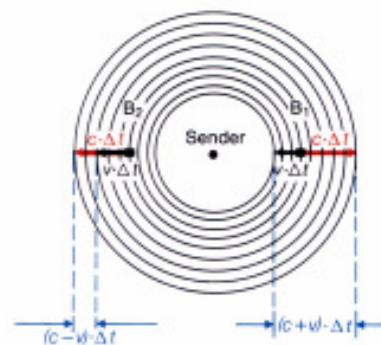


Abbildung 2.2.3¹²

2.2.2 Schallquelle in Ruhe, Empfänger bewegt¹³

Ein ruhender Sender erzeugt Schwingungen der Frequenz f , ein Beobachter bewegt sich auf ihn zu (vgl. Abb. 2.2.3 Beobachter B_1). Die Wellenlänge λ ist für den bewegten Empfänger unverändert, jedoch erreichen ihn die Wellen mit der Relativgeschwindigkeit zum Erreger, die die Summe der Ausbreitungsgeschwindigkeit im Medium und seiner Eigengeschwindigkeit ist und damit größer als Erstere. Für die beobachtete Ausbreitungsgeschwindigkeit c' und für die dopplerverschobene Frequenz f' gilt demnach:

$$c' = c + v \quad (2.2.2)$$

$$f' = \frac{c'}{\lambda} = \frac{c+v}{\lambda} = \frac{f(c+v)}{c} = f \left(1 + \frac{v}{c} \right)$$

Wie im zuerst behandelten Fall ist hier für v immer der Geschwindigkeitsbetrag einzusetzen. Die Formel für das Entfernen des Beobachters vom Sender erhält man durch Ersetzen des Pluszeichens durch ein Minus (siehe Abb. 2.2.3 B_2). Wie beim Fall von 2.2.1 gilt hier, dass die Wellen bei Annäherung gestaucht und bei Entfernung gestreckt werden.

2.2.3 Schallquelle und Empfänger bewegt

In diesem Fall wird vom Empfänger sowohl eine veränderte Wellenlänge als auch eine veränderte Ausbreitungsgeschwindigkeit wahrgenommen. Es gilt also

¹² Quelle: Bredthauer, Wilhelm ...: Schwingungen und Wellen Groß-Berhag. Stuttgart, 1986, S. 145–146

¹³ Abschnitt sinngemäße Übernahme aus Bader, Franz: Dorn-Bader Physik Sek II Gymnasium Gesamtband. Hannover, 2000, S. 327

$$f' = \frac{c'}{\lambda'}$$

mit λ' aus Formel (2.2.1) und c' aus Formel (2.2.2). Bezeichnet man die Geschwindigkeiten der Quelle und des Beobachters als v_Q und v_B , ergibt sich zunächst

$$f' = \frac{c + v_B}{\frac{c - v_Q}{f}} = f \left(\frac{c + v_B}{c - v_Q} \right)$$

für die Annäherung von Quelle und Empfänger. Ergänzt man nun diese Gleichung um den Fall des Entfernens erhält man die Formel¹⁴

$$f' = f \left(\frac{c \pm v_B}{c \mp v_Q} \right),$$

in der das jeweils obere Vorzeichen der Geschwindigkeiten für den Fall der Annäherung gilt und das untere für das Entfernen. Für v_Q oder v_B gleich Null ergeben sich die oben behandelten Fälle.

2.3 Praktische Bestätigung

Die experimentelle Bestätigung der oben hergeleiteten Formeln sollte ursprünglich mit dem im Folgenden beschriebenen ersten Experiment erfolgen, was auf Grund störender Nebengeräusche nicht gelang. Dasselbe Problem gab es zunächst auch bei einer alternativen Versuchsanordnung mit demselben Grundaufbau, die unter *Versuchsaufbau 2* beschrieben wird, konnte hier aber gelöst werden. Dennoch war eine eindeutige Bestätigung nicht möglich, weil weiterhin große Fehler auftraten.

Es wurden lediglich die beiden Fälle in Versuchen behandelt, in denen sich nur ein Part bewegt, weil die Ausrüstung der Schule nicht für Experimente zum komplexeren dritten Fall geeignet war.

Versuchsaufbau 1 - Motorisierter Wagen

Die erste Versuchsanordnung folgte direkt der Anleitung in „Versuchseinheiten Physik. Dopplereffekt“ (Mönter, PHYWE. Göttingen, 1978, S. 16–17). Hierbei wurde

¹⁴ Vgl. <http://de.wikipedia.org/wiki/Dopplereffekt>, 22.01.2007

von einem Tongenerator eine Frequenz erzeugt, die von einem Lautsprecher wiedergegeben wurde. Die Tonnahme erfolgte durch ein Sonden-Messmikrofon. Je nach Messreihe sollte entweder der Lautsprecher oder das Mikrofon auf einen Messwagen mit Elektromotor (siehe Abbildung rechts) montiert werden, während das jeweils andere Gerät in einem Stativ direkt neben der Fahrbahn (Annäherung an das *frontale* Passieren) ruhen sollte.



Das Mikrofon übergab das aufgenommene Signal einem NF-Verstärker. Ein elektronischer Digitalzähler war an den Ausgang des Verstärkers angeschlossen und zählte jeweils eine Sekunde lang die Schwingungen des Signals, um die gemessene Frequenz im Anschluss 1,5 Sekunden lang anzuzeigen und sich dann zurückzusetzen (vgl. *Messung 2.3.1*, Mess- und Anzeigedauer nicht veränderlich). Folglich musste die Fahrtstrecke des Messwagens und seine Geschwindigkeit sowie der Startzeitpunkt so gewählt werden, dass wenigstens eine vollständige Messung durchgeführt wurde.

Es zeigte sich schon bei Probemessungen, dass das Geräusch des Elektromotors das Signal des Lautsprechers übertönte, sodass nicht die gewünschte Frequenz gemessen wurde, sondern verschiedene Frequenzen des Motorgeräuschs. Weil so, und selbst mit einer improvisierten Schalldämmung aus Eierkartons um den Wagen, keine Messungen der Dopplerverschiebung möglich waren, wechselte ich zu einer Versuchsanordnung mit externem Antrieb, *Versuchsaufbau 2*.

Versuchsaufbau 2 - Gezogener Wagen

Diese Anordnung bestand aus denselben Geräten wie die erste, nutzte allerdings statt des automobilen Messwagens einen auf einem Metallrohr als Schiene fahrenden Wagen, der mit einer Angelschnur von einem Motor gezogen wurde. Der verwendete Elektromotor, den mir Herr VON KOWALKOWSKI zur Verfügung stellte, war sehr leise, sodass er selbst in unmittelbarer Nähe zum Mikrofon und bei der größten Umdrehungszahl nicht die Messung beeinflusste (überprüft ohne Antrieb des Wagens). Der Motor war an eine Gleichstrom-Spannungsquelle angeschlossen (in Abbildung 2.3.1 mittig unter der Fahrbahn), die sich im Bereich von 3–12 Volt in 1,5-Volt-Stufen regeln ließ und damit die Leistung des Motors bestimmte.

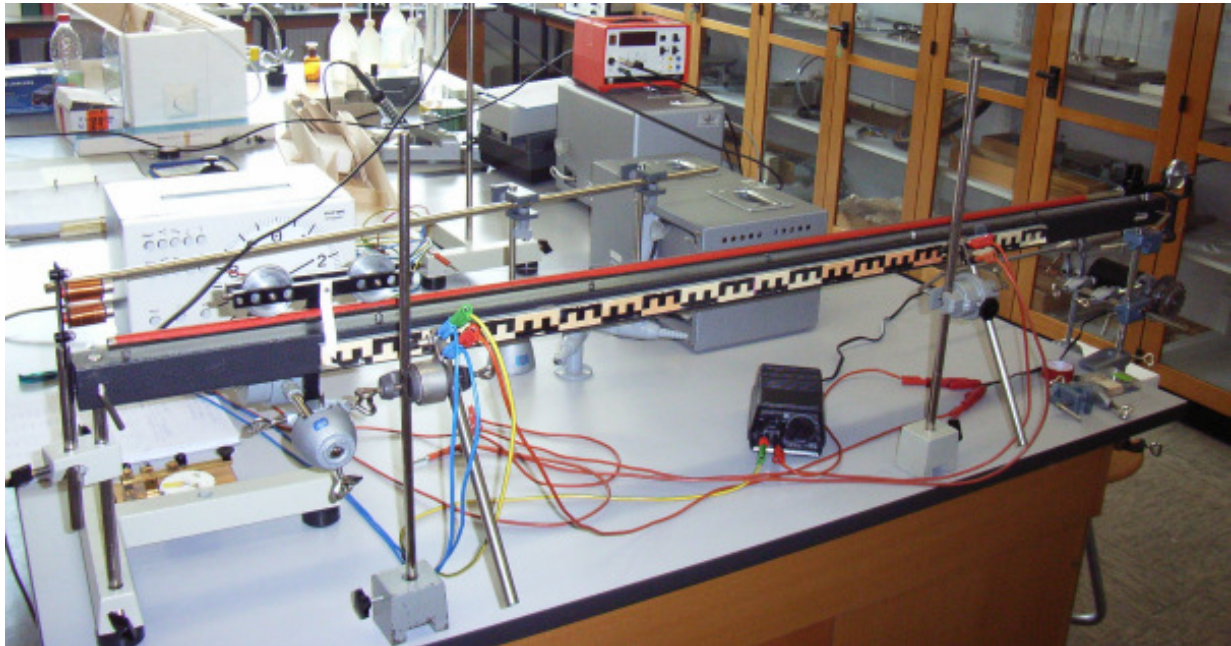


Abbildung 2.3.1

Lautsprecher bzw. Mikrofon (je nach Experiment) wurden unten an den Wagen montiert und mit einem Ausgleichsgewicht versehen, um den Wagen gerade zu halten, während das andere Gerät entweder beim Motor (zur Annäherung, rechts in Abb. 2.3.1) oder beim Startpunkt (zum Entfernen, links) in einem Stativ ruhte.

Nach dem Einschalten der Spannungsquelle wurde der Wagen durch den Motor so lange beschleunigt, bis er einen Schalter (in Abb. 2.3.1 links, vorm Wagen) passierte, wobei er diesen deaktivierte. Das Öffnen des Schalters schaltete zum Einen die Spannungsquelle ab und damit den Motor. Der Wagen wurde also nicht mehr weiter beschleunigt und bewegte sich auf Grund der geringen Reibung nun annähernd gleichförmig weiter. Zum Anderen startete das Öffnen des Schalters eine Stoppuhr (siehe Abb. 2.3.1 links hinter der Fahrbahn), die die Zeit bis zum Passieren eines zweiten Schalters (in Abb. 2.3.1 rechts vor der Fahrbahn) maß, der ebenfalls beim Passieren deaktiviert wurde und eine bestimmte Entfernung vom ersten hatte. Diese Zeitmessung diente der Geschwindigkeitsbestimmung, die parallel zu den Frequenzmessungen erfolgte, um die Geschwindigkeit der aktuellen Einstellung zu ermitteln.

Durch das Abschalten des Motors nach einer bestimmten Beschleunigungsstrecke konnte die Endgeschwindigkeit des Wagens durch das Verändern dieser Strecke und der Einstellung der Spannungsquelle – also der Beschleunigung – geregelt werden. Von der ersten Möglichkeit wurde jedoch kein Gebrauch gemacht, weil die Fahrbahn (etwa 1,40 m) in Verbindung mit der langen Messdauer des Digitalzählers dazu nicht genug Spielraum bot. So war die Beschleunigungsstrecke stets dieselbe.

Versuchsaufbau 2 - Ruhemessung

Bei ruhendem Lautsprecher und Mikrofon wurde exakt die ausgesandte Frequenz gemessen. Dabei schwankte die gemessene Frequenz um ± 1 Hz und erhöhte sich mit der Zeit langsam schrittweise, was durch die Erwärmung des Tongenerators oder des Lautsprechers verursacht wurde. Dies war auch bei allen weiteren Messungen der Fall und konnte leider nicht korrigiert werden, da der Tongenerator nur eine Frequenzeinstellung auf ± 10 Hz zuließ.

Versuchsaufbau 2.1 - Annäherung der Tonquelle an ruhenden Empfänger

Zunächst montierte ich den Lautsprecher an den Wagen und platzierte das Mikrofon beim Motor, um die Formel zur Annäherung der Tonquelle (siehe Abb. 2.3.2: Lautsprecher links hinten) an den ruhenden Empfänger (Mikrofon rechts vorne) zu bestätigen.

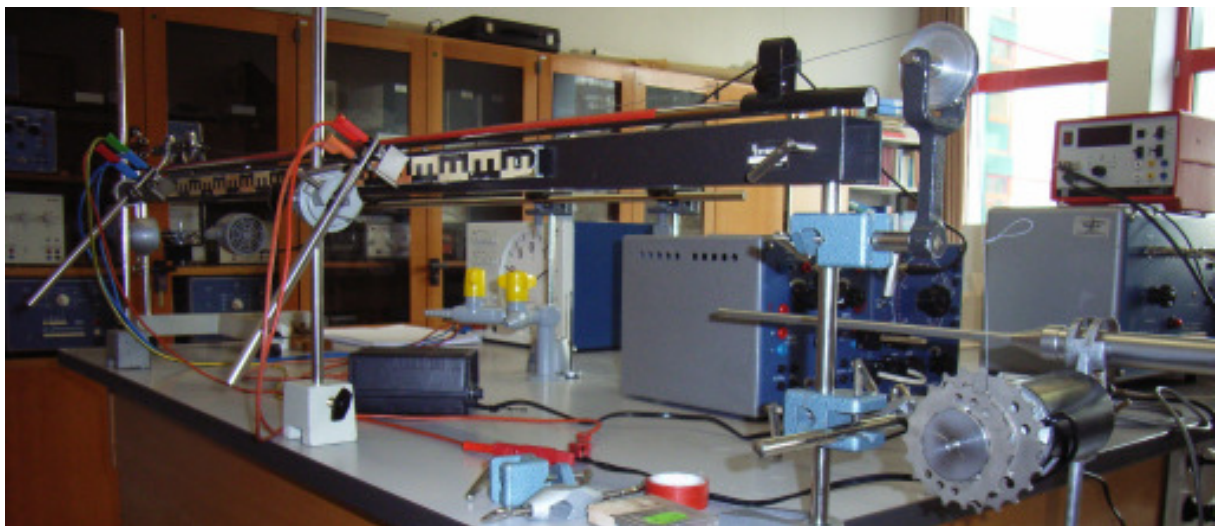


Abbildung 2.3.2

Wie bei *Versuchsaufbau 1* kam es hier zu störenden Nebengeräuschen: Bei höheren Geschwindigkeiten erzeugte das Rollen der Metallräder des Wagens auf der ebenfalls metallenen Schiene ein Geräusch, das die Messung verfälschte. Dieses Geräusch konnte durch das Aufkleben eines Faserklebebandes (rot) auf die Schiene vermieden werden, das allerdings den Rollwiderstand beträchtlich erhöhte. Mit der Schaffung eines leichten Gefälles der Fahrbahn konnte der erhöhte Rollwiderstand weitgehend ausgeglichen werden, sodass die Bewegung des Wagens – außer bei sehr niedrigen Ausgangsgeschwindigkeiten – wieder annähernd gleichförmig war. So weit nicht geschildert, wurde der Aufbau für die anderen Experimente nicht verändert.

Der gewählte Frequenzbereich wurde dadurch bestimmt, dass die Messung möglichst wenig von Nebengeräuschen beeinflusst werden sollte, und nicht zuletzt durch den Tongenerator, der zeitweise in bestimmten Frequenzbereichen große Schwankungen aufwies.

Die vier verschiedenen Geschwindigkeiten dieser Messreihe wurden durch die Spannungsstufen 4,5 V, 6 V, 7,5 V und 9 V festgelegt. Die Ergebnisse der Messreihe zu diesem Versuchsaufbau sind (wie auch alle anderen Messreihen) im Abschnitt 5.2 *Messreihen* zu finden unter *Messung Versuchsaufbau 2.1*. Die Ausgangsfrequenz lag um 4930 Hz.

Versuchsaufbau 2.2 - Entfernen der Tonquelle vom ruhenden Empfänger

Für dieses Experiment wurde der Lautsprecher am Wagen um 180° gedreht, so dass er nun entgegengesetzt der Bewegungsrichtung des Wagens Schall aussandte, und das Mikrofon wurde am Startpunkt des Wagens platziert. Leider konnte durch eine Fehlfunktion der Tonquelle nicht derselbe Frequenzbereich wie bei der Annäherung des Lautsprechers an das Mikrofon gewählt werden. Die verwendete Ausgangsfrequenz von etwa 1500 Hz lag nur wenig unter der Grenze von 2000 Hz, ab der es Frequenzschwankungen gab.

Es wurden zur Beschleunigung die Spannungsstufen 4,5 V, 6 V und 7,5 V benutzt. Die Ergebnisse dieser Messreihe finden sich unter *Messung Versuchsaufbau 2.2*.

Auswertung der Versuchsaufbauten 2.1 und 2.2

Zur Bestätigung der in 2.1 hergeleiteten Formeln zum Dopplereffekt sollen die berechneten Dopplerfrequenzen zu den gemessenen Geschwindigkeiten mit den gemessenen Frequenzen verglichen werden. Da die Ausgangsfrequenz jedoch weder über beide Experimente noch jeweils innerhalb exakt konstant gehalten werden konnte, vergleichen wir das Verhältnis f' / f_0 mit dem durch die Formel in 2.2.1 für die jeweilige Geschwindigkeit vorausgesagten Verhältnis. Als Schallgeschwindigkeit c nehmen wir 343 m/s¹⁵ an, wie auch überall sonst in dieser Arbeit.

Das Diagramm Abb. 2.3.3 zeigt das Verhältnis der verschobenen Frequenz zur ursprünglichen in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit, wobei eine positive Geschwindigkeit Annäherung bedeutet und eine negative das Entfernen.

¹⁵ Quelle: <http://de.wikipedia.org/wiki/Schallgeschwindigkeit>, 02.04.2007

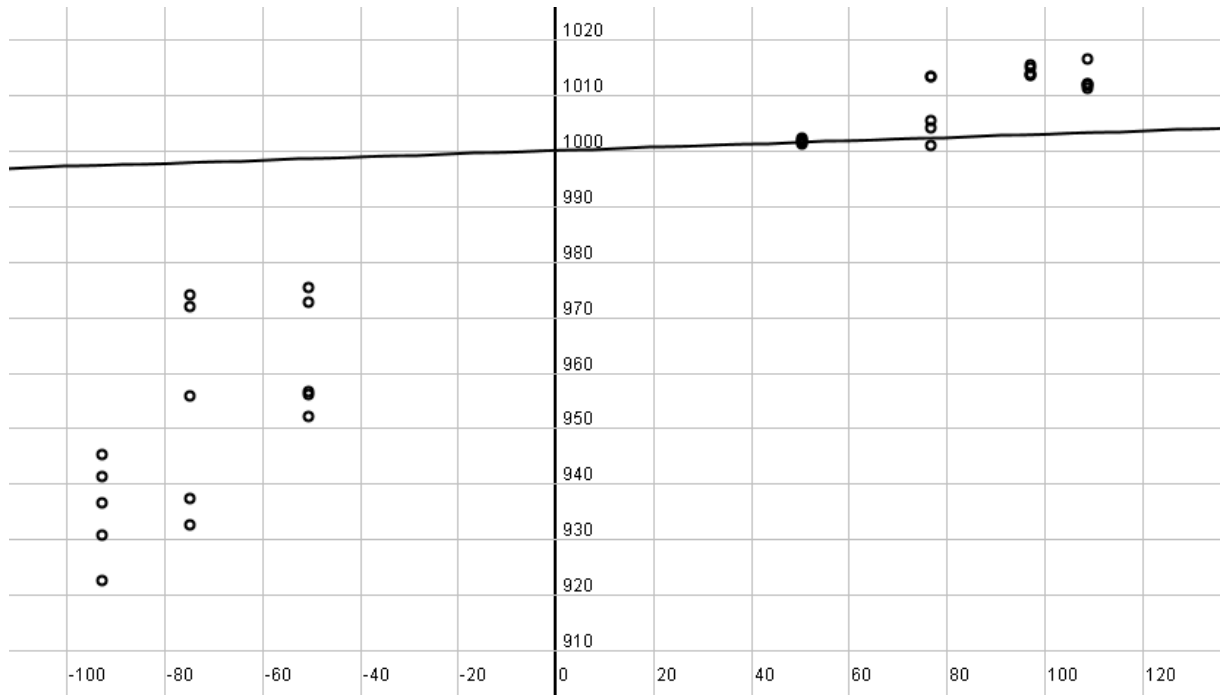


Abbildung 2.3.3: x-Achse: v in cm/s; y-Achse: $f' / f_0 * 1000$

Zu jeder Geschwindigkeitsstufe sind die Frequenzverhältnisse der jeweils fünf am nächsten beieinander liegenden (d.h. nicht gestrichenen, siehe Messreihen) Dopplerefrequenzen als Punkte dargestellt. (Dabei ist der Faktor 1000 bedingt durch die verwendete Software.) Die Geschwindigkeit jeder Stufe wurde als arithmetisches Mittel der fünf am nächsten beieinander liegenden Geschwindigkeiten festgelegt. Die zu Grunde liegenden Werte sind unter *Messung Versuchsaufbau 2.1* und *2.2* nachzulesen. Die Voll-Linie stellt die Werte nach der Formel aus der Herleitung in *2.2.1* dar.

Wie das Diagramm deutlich macht, entsprechen nur die Werte bei der niedrigsten positiven Geschwindigkeit dem berechneten Wert. Bei der nächsthöheren stimmen die Werte noch in etwa mit dem vorausgesagten überein. Die Werte der dritten Geschwindigkeitsstufe liegen zwar dicht beieinander, aber weit vom berechneten Wert entfernt. Ähnlich verhält es sich mit den Werten der höchsten positiven Geschwindigkeitsstufe.

Die Werte der drei Messungen zum Entfernen liegen offensichtlich jeweils innerhalb einer Geschwindigkeit sehr weit auseinander und auch sehr deutlich unter den berechneten, sodass sie auf keinen Zusammenhang zur Formel schließen lassen. Die einzige Erkenntnis, die sich aus den Messergebnissen von Versuchsaufbau 2.2 gewinnen lässt, ist, dass die Dopplerverschiebung mit dem Betrag der Geschwindigkeit zunimmt.

Insgesamt ist es kaum möglich, die Messreihen als Bestätigung der bewussten Formel zu sehen, da fast alle gemessenen Werte deutlich von dem jeweils vorhergesagten abweichen. Weil sich die Formel in anderen Versuchen jedoch schon vielfach als gültig erwiesen hat, ist von starken Fehlern bei meinem Experiment auszugehen. Ich denke, alle offensichtlichen Fehlerquellen beseitigt zu haben, weshalb ich auf weniger offensichtliche schließe. Dies könnten verbleibende Störgeräusche oder der Einfluss von Vibrationen auf die Tonwiedergabe während des Fahrens sein.

Durch die anfänglichen Probleme, überhaupt Messungen zustande zu bekommen, blieb mir nach dem Auswerten der obigen fehlerbehafteten Messergebnisse leider keine Zeit mehr für eine intensive Optimierung.

Fehlerbetrachtung

Die Strecke der Zeitmessung konnte auf etwa 1 cm genau festgelegt werden und die Stoppuhr gab die Zeit auf eine Hundertstelsekunde genau an, wobei ich wegen der Analogdarstellung einen Ablesefehler von einer weiteren Hundertstelsekunde annehme. Trotz des resultierenden recht geringen Fehlers der Geschwindigkeitsmessung (siehe unten Summe der relativen Fehler von Strecke und Zeitmessung) wurden bei ein und derselben Einstellung der Spannungsquelle leicht abweichende Geschwindigkeiten gemessen, was vermutlich dadurch hervorgerufen wurde, dass die Beschleunigung abhängig von der Vorspannung der Zugschnur nicht immer gleichmäßig verlief.

Zur Genauigkeit der Tonquelle ist zu sagen, dass sie die meiste Zeit, nach dem Zählgerät, dessen Messgenauigkeit nicht bekannt war, die eingestellte Frequenz auf ± 1 Hz genau hielt. (Das Gerät arbeitete nicht immer einwandfrei; so schwankte die ausgegebene Frequenz während des Anfertigens der Messreihen mehrmals um 100–200 Hz, was die Durchführung der Messungen stark behinderte.) Dieser Fehler ist bei den verwendeten Frequenzen von 5000 Hz bzw. 1500 Hz vernachlässigbar. Ablesefehler waren beim Zählgerät durch die Digitalanzeige ausgeschlossen.

Aus denselben Gründen wie oben betrachten wir nicht die absolute Frequenzverschiebung, sondern das Verhältnis der Dopplerfrequenz zur ursprünglichen. Aus den Gleichungen

$$Q = \frac{f'}{f_0} = \frac{1}{1 \mp \frac{v}{c}} \quad \text{und} \quad v = \frac{s}{t}$$

ergibt sich der relative Fehler für den zu untersuchenden Quotienten Q . Zusätzlich mit einem Summanden für den relativen mittleren Fehler der Messung an letzter Stelle ist der vorausgesagte Gesamtfehler wie folgt definiert:

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta v}{v} + \frac{\Delta Q_M}{Q} = \frac{\Delta s}{s} + \frac{\Delta t}{t} + \frac{\Delta Q_M}{Q}$$

Diese Formel zeigt, dass mit zunehmender Geschwindigkeit, d.h. mit abnehmender Messzeit dieser (da Strecke konstant), der Messfehler der Geschwindigkeit und damit der Fehler der Frequenzverschiebung zunimmt.

Der absolute mittlere Fehler der Messung beträgt

$$\Delta Q_M = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\bar{Q} - Q_i)^2},$$

wobei n die Anzahl der Messwerte, \bar{Q} der mittlere Quotient und Q_i der numerierte Quotient eines Messwerts ist.

Exemplarisch berechnen wir nun den relativen Fehler der Messungen bei der Annäherung und der Antriebsspannung 6 Volt (Werte siehe *Messung Versuchsaufbau 2.1*). Die Strecke betrug 70 cm, die gemessene Zeit im Schnitt 0,91 s, das Frequenzverhältnis war 1,0132.

Zunächst berechnen wir den absoluten mittleren Fehler der Messreihe, wobei wir das durchschnittliche Frequenzverhältnis von 1,0074 verwenden:

$$\Delta Q_M = \sqrt{\frac{1}{5 \cdot 4} [(1,0074 - 1,0041)^2 + (1,0074 - 1,0008)^2 + (1,0074 - 1,0055)^2 + (1,0074 - 1,0134)^2 + (1,0074 - 1,0132)^2]} \approx 0,0158$$

Es ergibt sich mit den oben genannten absoluten Fehlern

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{1 \text{ cm}}{70 \text{ cm}} + \frac{0,02 \text{ s}}{0,91 \text{ s}} + \frac{0,0158}{1,0074} \approx 1,4\% + 2,2\% + 1,6\% = 5,2\%.$$

Das berechnete Frequenzverhältnis beträgt bei der Durchschnittsgeschwindigkeit 1,0022. Als Beispiel berechnen wir die relative Abweichung eines Messwertes:

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{1,0132 - 1,0022}{1,0022} \approx 1,1\%$$

Dieser Wert liegt also im Rahmen der berechneten Messgenauigkeit, was auch bei allen anderen Messwerten der beiden Experimente zur Annäherung der Tonquelle an den Empfänger und zum Entfernen von ihm der Fall ist.

Versuchsaufbau 2.3 - Empfänger bewegt, Tonquelle in Ruhe

Um die Formel zu diesem Fall zu bestätigen, war es nötig, das Mikrofon an den Wagen zu montieren (siehe Abb. 2.3.4 rechts hinten) und den Lautsprecher in einem Stativ ruhen zu lassen – zunächst neben dem Elektromotor für den Fall der Annäherung (vorne links).

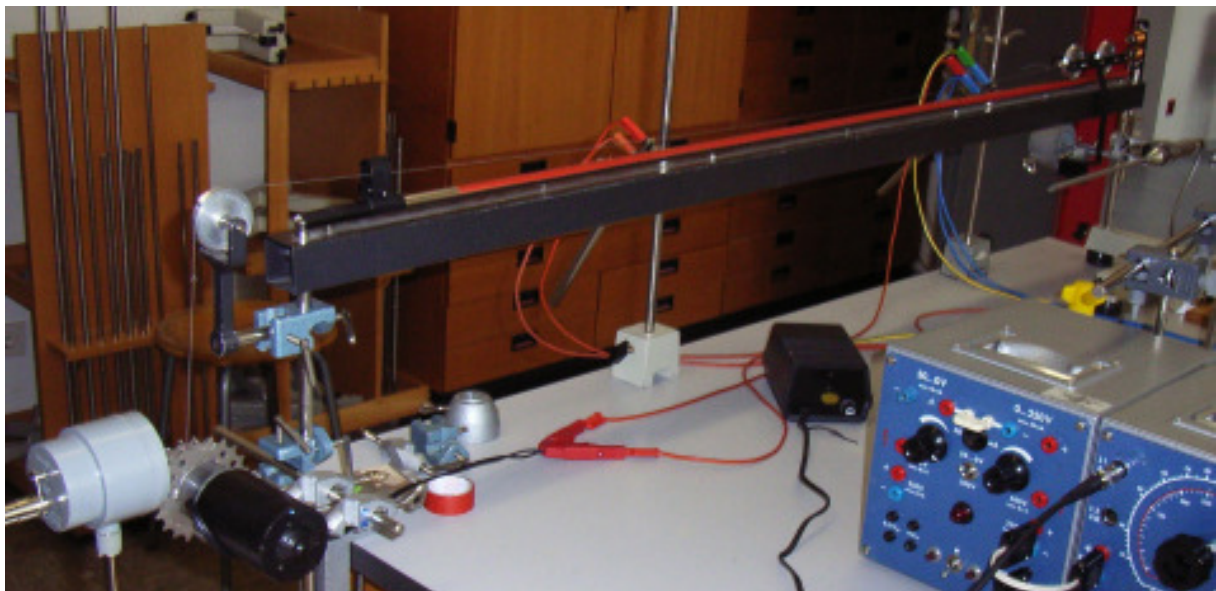


Abbildung 2.3.4

Bei den Messungen auf der Geschwindigkeitsstufe 4,5 V zeigte sich, dass das Mikrofon in Bewegung nicht die Frequenz des Lautsprechers als stärkste empfing, stattdessen gab es extreme Schwankungen von circa ± 300 Hz. Dies wurde mit Ausgangsfrequenzen in den Bereichen um 750 Hz, 1500 Hz, 5000 Hz, 7000 Hz und 11000 Hz geprüft. Eine Ursache für diese Fehlmessungen könnten durch das Fahren entstandene Vibrationen sein. Es konnte für den Fall bei bewegtem Empfänger und ruhendem Sender daher leider keine Messung stattfinden.

3 Das versetzte Passieren

3.1 Einleitung

Beim versetzten Passieren bewegt sich, wie beim frontalen Passieren (siehe 2 *Das frontale Passieren*), entweder der Verursacher oder der Beobachter einer Welle auf den anderen zu oder vom anderen weg, oder beide bewegen sich relativ zum Medium und zueinander (mit derselben vektoriellen Richtung), wobei beim versetzten Passieren jedoch der ruhende bzw. langsamere Part in einem Mindestabstand größer Null passiert wird. Das bedeutet, der Geschwindigkeitsvektor des bewegten/schnelleren Parts hat nie dieselbe Richtung wie der Verbindungsvektor der beiden – bei sehr großem Abstand (parallel zur Bewegungsrichtung) jedoch annähernd, d.h. dabei gelten näherungsweise die Formeln des frontalen Passierens. Somit ist das frontale Passieren ein Grenzfall des versetzten.

Da die Bewegung nicht frontal erfolgt, ändert sich laufend die Relativgeschwindigkeit und damit die Dopplerverschiebung. Auch der Wechsel Letzterer vom positiven in den negativen Bereich ist daher fließend, nicht sprunghaft wie beim frontalen Passieren.

Das versetzte Passieren entspricht zum Beispiel dem Fall eines in der Ferne vorbei fliegenden Flugzeugs, dessen wahrgenommener Ton sich nur langsam verändert, und hat Bedeutung kurz vor und nach dem Moment des Passierens, wo die Dopplerverschiebung das Vorzeichen wechselt, da in der Realität immer ein gewisser Mindestabstand auftritt.

3.2 Theoretische Herleitung

Wie auch beim frontalen Passieren sind hier die drei Fälle zu unterscheiden, bei denen entweder nur ein Part oder beide bewegt sind.

3.2.1 Schallquelle bewegt, Beobachter in Ruhe

Wie in der Einleitung angesprochen, muss beim versetzten Passieren die Relativgeschwindigkeit des bewegten Parts zum ruhenden betrachtet werden, da diese nicht dieselbe ist wie die absolute Geschwindigkeit (beim frontalen Passieren der Fall). Wie in der Skizze Abb. 3.2.1 zu sehen, legen wir den ruhenden Part, also zunächst den Beobachter B, zur Vereinfachung in den Koordinatenursprung. Zudem legen wir den

Zeitpunkt $t = 0$ als Augenblick des Passierens, d.h. mit dem minimalen Abstand d_{\min} und der x-Koordinate der Quelle gleich Null, fest. Im negativen Bereich der x-Achse und der Zeitachse nähert sich die Schallquelle dem Beobachter, während sie sich im positiven Teil der jeweiligen Achse von B entfernt.

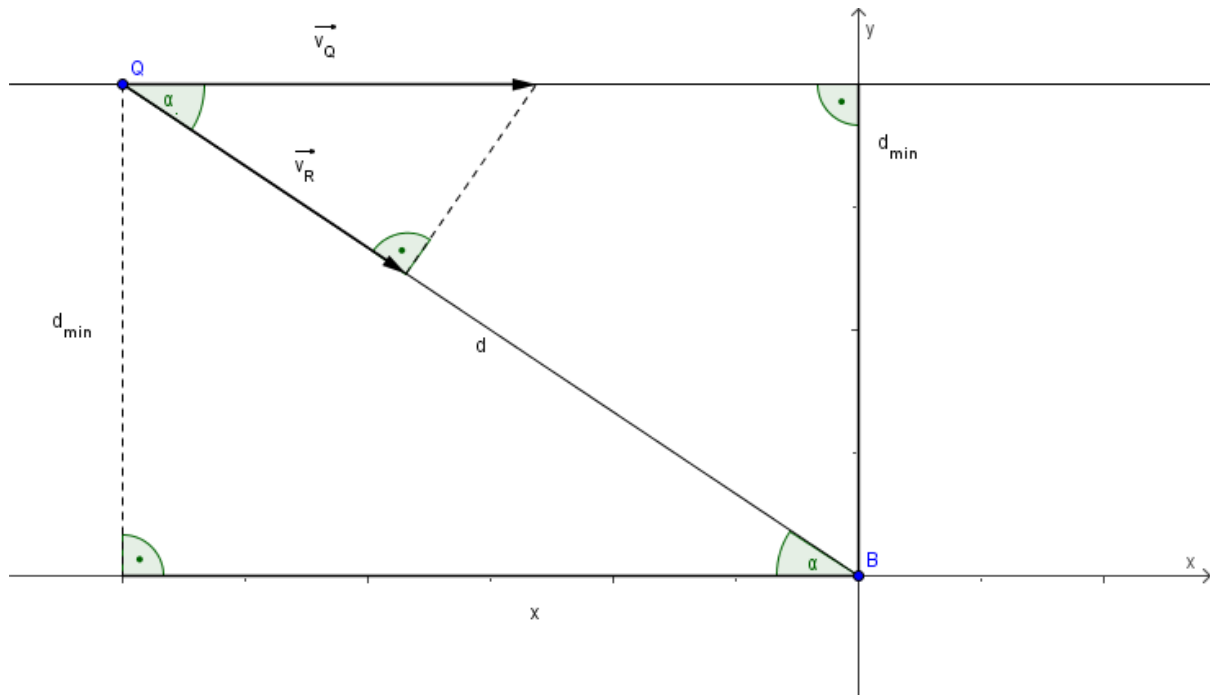


Abbildung 3.2.1

In die Formel zur Dopplerfrequenz bei Annäherung der Schallquelle

$$f' = f \frac{1}{1 - \frac{v_Q}{c}}$$

ist nun statt v_Q die Relativgeschwindigkeit $v_R = v_Q \cos \alpha$, die Projektion von v auf den Abstand d , einzusetzen. Interessanter als die Abhängigkeit der Dopplerfrequenz vom Winkel zwischen Absolutgeschwindigkeit und Abstand ist aber der Zusammenhang mit dem Abstand selbst sowie der zeitliche Verlauf.

Zunächst beschreiben wir α durch die x-Koordinate:

$$\tan \alpha = \frac{d_{\min}}{x} \Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{d_{\min}}{x}\right)$$

Die x-Koordinate wiederum lässt sich als zeitliche Funktion beschreiben:

$$x = v_Q t \Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{d_{\min}}{v_Q t}\right)$$

Außerdem können wir α mit dem Momentanabstand d ausdrücken:

$$\sin \alpha = \frac{d_{\min}}{d} \Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{d_{\min}}{d}\right)$$

Es ergeben sich also für die Annäherung der Schallquelle an den Beobachter die folgenden Funktionen; für das Entfernen ist das Minus durch ein Plus zu ersetzen – außer bei $f'(\alpha)$, wo die Annäherung der Bereich von $0-90^\circ$ ist und das Entfernen der Bereich von $90-180^\circ$. Die anderen drei Funktionen gelten gemäß unseres Koordinatensystems für die Annäherung nur im negativen Bereich der Abszisse und für das Entfernen im positiven.

$$f'(\alpha) = f \frac{1}{1 - \frac{v_Q \cos \alpha}{c}} \quad f'(x) = f \frac{1}{1 - \frac{v_Q \cos\left(\arctan \frac{d_{\min}}{x}\right)}{c}}$$

$$f'(t) = f \frac{1}{1 - \frac{v_Q \cos\left(\arctan \frac{d_{\min}}{v_Q t}\right)}{c}} \quad f'(d) = f \frac{1}{1 - \frac{v_Q \cos\left(\arcsin \frac{d_{\min}}{d}\right)}{c}}$$

Abb. 3.2.2 zeigt die Graphen der Funktionen $f'(t)$ für die Annäherung (rot) und für das Entfernen (blau). Die erste Funktion gilt dementsprechend nur im negativen Bereich (vor dem Moment des Passierens), die zweite nur im positiven (danach).

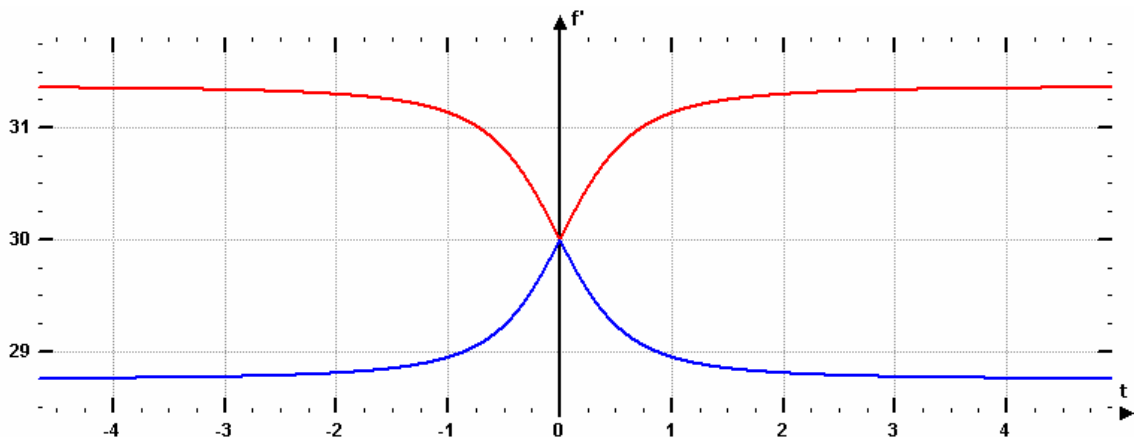


Abbildung 3.2.2

Um die beiden Funktionen zu kombinieren, benutzen wir die Signumfunktion $\text{sgn}(x)$, die für alle positiven x +1, für alle negativen -1 und für die Eingabe Null ebenjenes ausgibt.

$$f'(t) = f \frac{1}{1 - \frac{\text{sgn}(-t) v_Q \cos\left(\arctan \frac{d_{\min}}{v_Q t}\right)}{c}} = f \frac{1}{1 + \frac{\text{sgn}(t) v_Q \cos\left(\arctan \frac{d_{\min}}{v_Q t}\right)}{c}}$$

Den Graphen dieser Funktion zeigt Abb. 3.2.3.

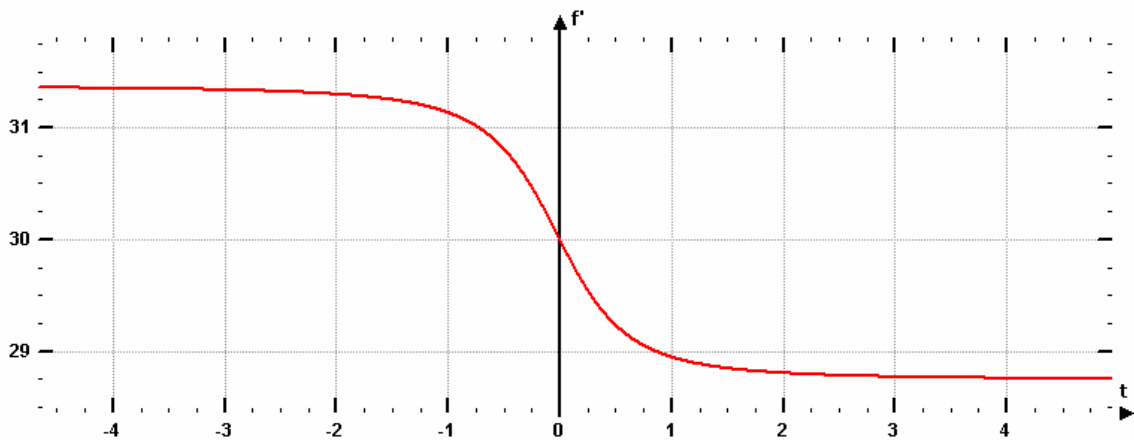


Abbildung 3.2.3

Gleichermaßen verfahren wir mit $f'(x)$ und $f'(d)$ und erhalten:

$$f'(x) = f \frac{1}{1 + \frac{\text{sgn}(x) v_Q \cos\left(\arctan \frac{d_{\min}}{x}\right)}{c}} \quad f'(d) = f \frac{1}{1 + \frac{\text{sgn}(d) v_Q \cos\left(\arcsin \frac{d_{\min}}{d}\right)}{c}}$$

Die Dopplerfrequenz beim frontalen Passieren können wir in gleicher Weise als

$$f_f'(t) = f \frac{1}{1 + \frac{\text{sgn}(t) v_Q}{c}}$$

darstellen. Dabei ist es dank unseres Koordinatensystems egal, ob wir x , t , oder d als Variable wählen.

Nun betrachten wir die Graphen der drei Funktionen und die Dopplerfrequenz beim frontalen Passieren bei gleichen Bedingungen in Abb. 3.2.4.

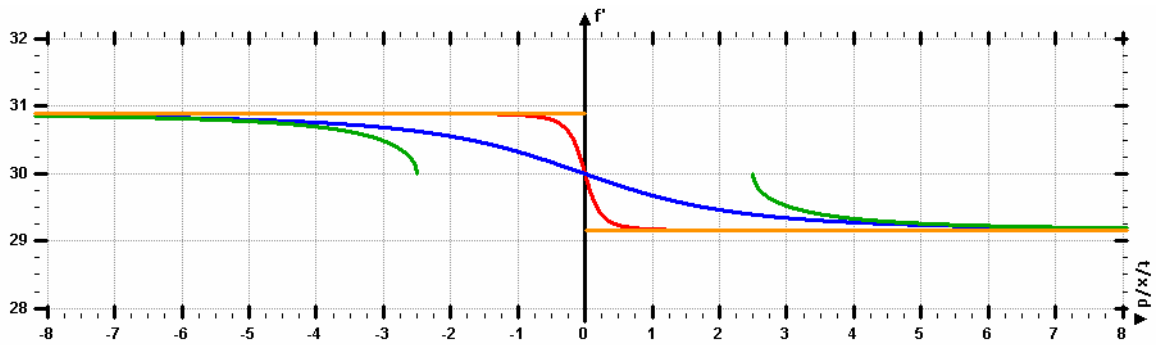


Abbildung 3.2.4: rot: $f'(t)$ – blau: $f'(x)$ – grün: $f'(d)$ – orange: $f'_f(t)$

Alle drei Funktionen haben die gleiche Asymptote, nämlich die Dopplerfrequenz für das frontale Passieren, da sich die Relativgeschwindigkeit bei α gegen 0° oder 180° kaum von der Absolutgeschwindigkeit unterscheidet. $f'(t)$ entspricht von der Form exakt $f'(x)$, da beide Funktionen dieselbe Struktur haben.

Die Definitionslücke von $f'(d)$ erklärt sich dadurch, dass der Betrag des Mindestabstands definitionsmäßig nicht unterschritten wird und der Arcussinus nur für Werte zwischen -1 und +1 definiert ist. In der Realität ist $-d_{min}$ gleich $+d_{min}$, es gibt keine Zwischenwerte. Auch dieser „Schönheitsmakel“ des Graphen lässt sich durch die Vorzeichenfunktion beseitigen, indem man je nach Vorzeichen von d den Mindestabstand addiert oder subtrahiert. So erhält man die Dopplerfrequenz in Abhängigkeit von der Differenz von d und d_{min} :

$$f'(d \pm d_{min}) = f \frac{1}{1 + \frac{\text{sgn}(d) v_Q \cos\left(\arcsin \frac{d_{min}}{d + \text{sgn}(d) d_{min}}\right)}{c}}$$

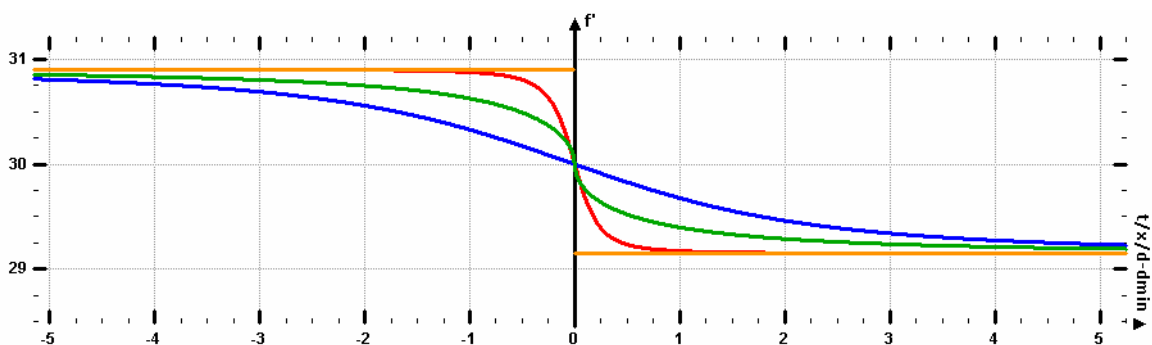


Abbildung 3.2.5: rot: $f'(t)$ – blau: $f'(x)$ – grün: $f'(d \pm d_{min})$ – orange: $f'_f(t)$

Nun möchte ich anhand von Abb. 3.2.6 den Einfluss der Parameter v_Q und d_{min} auf den zeitlichen Verlauf der Frequenz deutlich machen.

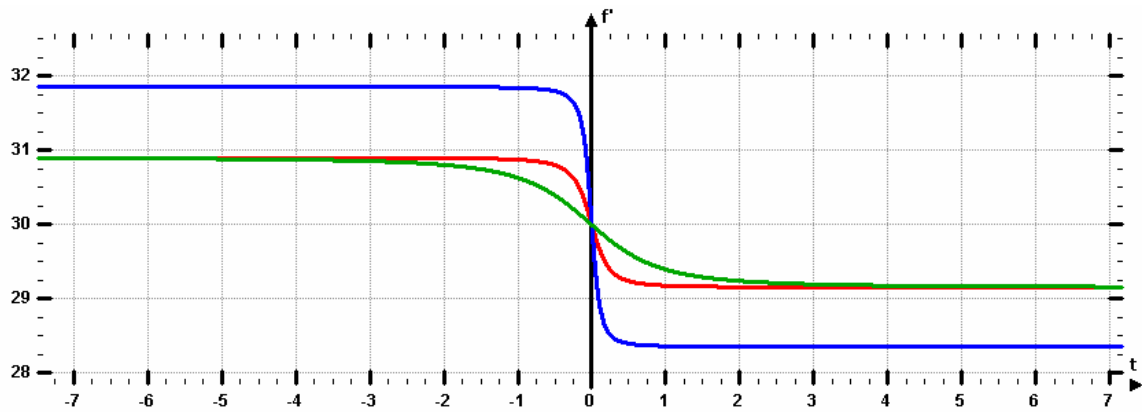


Abbildung 3.2.6

Die rote Kurve stellt den Ausgangsverlauf dar. Bei der blauen Kurve wurde die Geschwindigkeit verdoppelt, was zu einer Vergrößerung der Dopplerverschiebung geführt hat. Der grünen Kurve liegt ein vervierfachter Mindestabstand zu Grunde. Hier verlängert sich die zeitliche Dauer des Wechsels zwischen positiver und negativer Dopplerverschiebung. Die gezeigten Effekte treten in ähnlicher Weise bei den anderen beiden Funktionen auf.

Setzt man in einer der Funktionen $d_{min} = 0$, erhält man die Gleichung des frontalen Passierens, weil

$$\cos(\arctan 0) = \cos(0) = 1 \quad \text{und} \quad \cos(\arcsin(0)) = \cos(0) = 1.$$

Zur Funktion Zeit–Dopplerfrequenz ist anzumerken, dass sie die Zeit vernachlässigt, die der Schall für die Reise vom Sender zum Empfänger benötigt. Das heißt zum Beispiel die Ausgangsfrequenz wird nicht exakt in dem Moment wahrgenommen, in dem die kürzeste Entfernung zwischen Sender und Empfänger besteht, sondern leicht verzögert. Beim Fall der Bewegung des Empfängers tritt diese Verzögerung nicht auf, weil die Dopplerverschiebung allein durch eben dessen Bewegung verursacht wird und nicht durch den Sender.

3.2.2 Beobachter bewegt, Schallquelle in Ruhe

Für diesen Fall gelten weitgehend dieselben Aussagen wie für den ersten. Die Formel für die Annäherung des Beobachters B an die Schallquelle lautet nach der Herleitung in 2.2.2

$$f' = f \left(1 + \frac{v_R}{c} \right).$$

Verwenden wir dieselben Voraussetzungen wie in 3.2.1, können wir die Relativgeschwindigkeit in gleicher Weise wie dort beschreiben und es ergeben sich für die bekannten Funktionen die folgenden Formeln.

$$f'(\alpha) = f \left(1 + \frac{v_B \cos \alpha}{c} \right) \quad f'(x) = f \left(1 - \frac{\operatorname{sgn}(x) v_B \cos \left(\arctan \frac{d_{\min}}{x} \right)}{c} \right)$$

$$f'(t) = f \left(1 - \frac{\operatorname{sgn}(t) v_B \cos \left(\arctan \frac{d_{\min}}{v_B t} \right)}{c} \right)$$

$$f'(d) = f \left(1 - \frac{\operatorname{sgn}(d) v_B \cos \left(\arcsin \frac{d_{\min}}{d} \right)}{c} \right)$$

Die Graphen haben (bei Geschwindigkeiten deutlich unter der Schallgeschwindigkeit) dieselbe Form wie bei der Bewegung der Schallquelle und auch die oben behandelten Parameter beeinflussen den Frequenzverlauf in derselben Weise.

3.2.3 Vergleich der Frequenzverläufe bei bewegtem Verursacher und bei bewegtem Beobachter

Nun vergleichen wir die Frequenzverschiebung bei bewegtem Sender und bewegtem Beobachter anhand Abb. 3.2.7.

Rot und grün dargestellt ist die Dopplerfrequenz bei bewegtem Beobachter – rot mit 10% Schallgeschwindigkeit, in Grün mit 1/3 Schallgeschwindigkeit. Blau und gelb sind die Kurven für einen bewegten Verursacher – in Blau bei 10%, gelb bei 1/3 Schallgeschwindigkeit. Alle anderen Parameter sind jeweils gleich.

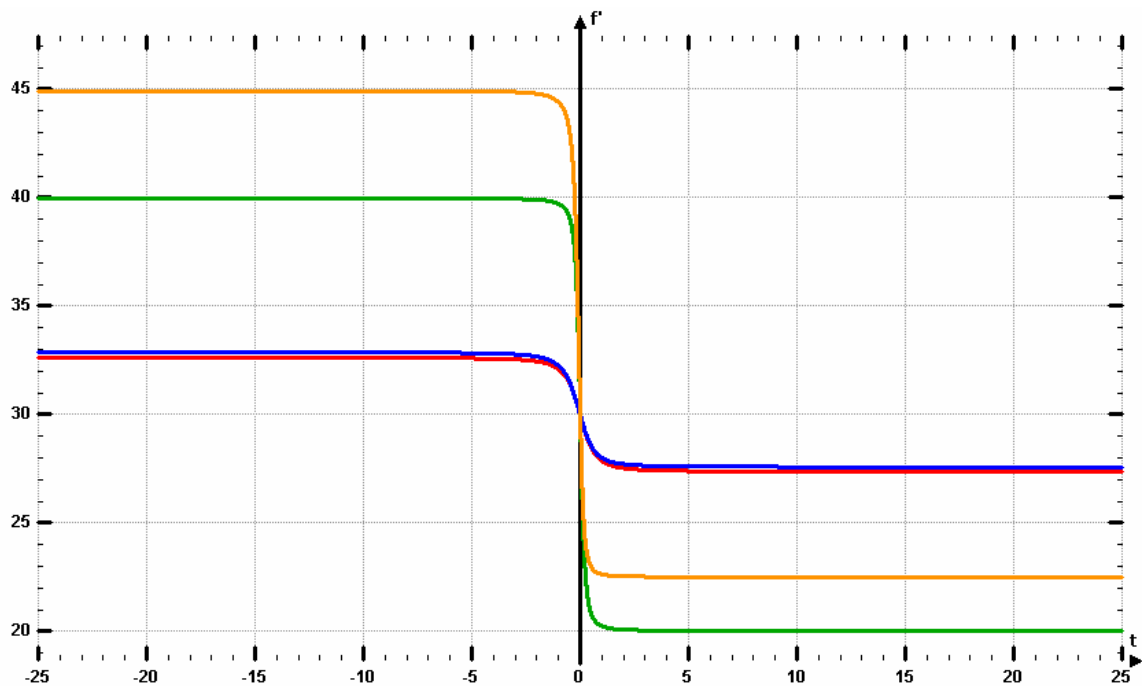


Abbildung 3.2.7: rot und grün: bewegter Beobachter – blau und gelb: bewegter Verursacher

Es wird deutlich, bei 10% Schallgeschwindigkeit gibt es kaum einen Unterschied zwischen den beiden Arten der Dopplerverschiebung. Mit noch niedrigeren Geschwindigkeiten gibt es praktisch keine Differenz. Bei $1/3 c$ ist ein signifikanter Unterschied sichtbar; dieser wächst mit steigender Geschwindigkeit weiter an.

Des Weiteren fällt auf, dass der Betrag der Frequenzverschiebung im Fall der bewegten Quelle vor und nach dem Moment des Passierens nicht derselbe sind. Um dies näher zu untersuchen, betrachten wir die Dopplerverschiebung direkt. Bei bewegtem Verursacher gilt für sie:

$$|\Delta f_Q| = |f' - f| = \left| f \frac{1}{1 + \frac{\text{sgn}(t) v_Q \cos\left(\arctan \frac{d_{\min}}{v_Q t}\right)}{c}} - f \right|$$

Und bei bewegtem Beobachter gilt:

$$|\Delta f_B| = \left| f - f \frac{\operatorname{sgn}(t) v_B \cos\left(\arctan \frac{d_{\min}}{v_B t}\right)}{c} - f \right| = \left| -f \frac{\operatorname{sgn}(t) v_B \cos\left(\arctan \frac{d_{\min}}{v_B t}\right)}{c} \right|$$

$$= f \frac{v_B \cos\left(\arctan \frac{d_{\min}}{v_B t}\right)}{c}$$

Abb. 3.2.8 veranschaulicht den Betrag der Dopplerverschiebung mit denselben Werten wie bei Abb. 3.2.7, der negative Bereich der x-Achse entspricht weiterhin der Annäherung des bewegten Parts an den ruhenden, der positive dem Entfernen.

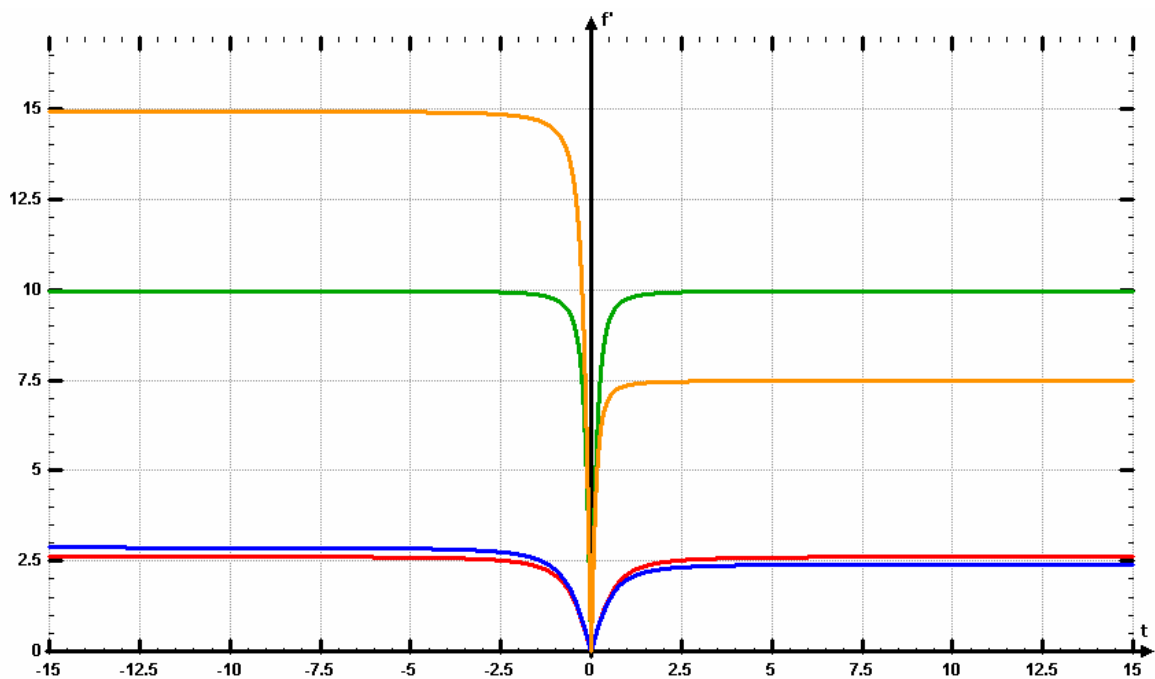


Abbildung 3.2.8: rot und grün: bewegter Beobachter – blau und gelb: bewegter Verursacher

3.2.4 Verursacher und Beobachter in Bewegung

Um diesen Fall zu beschreiben, bei dem sich Beobachter und Verursacher gleichförmig und parallel bewegen, ist es möglich, den Koordinatenursprung in einen der beiden Beteiligten zu legen. Verwendet man nun den Betrag der Summe der beiden Geschwindigkeitsvektoren als Absolutgeschwindigkeit, kann man die in 3.2.1 und 3.2.2 hergeleiteten Formeln benutzen.

3.3 Praktische Bestätigung (nicht erfolgt)

Eine Bestätigung der oben hergeleiteten Formeln zum versetzten Passieren im Experiment war mir nicht möglich, da die zeitliche Auflösung der Frequenzmessung durch das Zählgerät mit einer Messung in 2,5 Sekunden (vgl. *Messung 2.3.1*) zu gering war, auch bei dem mit den vorliegenden Geräten größtmöglichen Abstand von etwa 3 Metern. Durch die unveränderliche Messdauer von einer Sekunde wären keine Momentanwerte der Dopplerfrequenz ermittelt worden, sondern kaum aussagekräftige Durchschnittswerte.

4 Kurzfassung

Die Arbeit erläutert zunächst die Grundlagen des Dopplereffekts, dessen Wirkung aus dem Alltag bekannt ist, anhand des Falls des frontalen Passierens und leitet die Gleichungen für dessen Fälle einer bewegten Schallquelle, eines bewegten Beobachters und für die Bewegung beider her, wobei jeweils eine andere Frequenz beobachtet wird als die ausgesendete. Anschließend wird der Versuch der praktischen Bestätigung der Formeln beschrieben, der auf Grund starker Messfehler nur für eine Gleichung und nicht einwandfrei gelang.

Es folgt die Behandlung des komplexeren versetzten Passierens, bei dem es einen Mindestabstand zwischen Schallquelle und Beobachter gibt. Dabei wird aufgezeigt, dass das frontale als Grenzfall des versetzten Passierens zu sehen ist. Auf Basis der Gleichungen des frontalen Passierens werden hier entsprechende Funktionen hergeleitet und mit Hilfe von Graphen veranschaulicht. Experimente zur Bestätigung der Formeln waren in diesem Fall nicht möglich.

5 Anhang

5.1 Näheres zur verwendeten Software

Das Diagramm Abbildung 2.3.3 wurde mit dem Plotter „Math4U2“ erstellt, weitere Informationen auf <http://www.math4u2.de/>. Die Skizze Abbildung 3.2.1 wurde mit der Mathematik-Software „GeoGebra“ gezeichnet, mehr Informationen auf <http://www.geogebra.org/>. Die Graphen Abbildung 3.2.2 bis 3.2.8 wurden vom Funktionsplotter „WZGrapher“ generiert, weitere Informationen auf <http://www.walter-zorn.de/>.

5.2 Messreihen

Messung 2.3.1

$$15 T = 37,0 \text{ s} \Rightarrow T \approx 2,5 \text{ s}$$

Messung Versuchsaufbau 2.1

Frequenzen

U in V	f ₀ in Hz	f' in Hz	gestrichen (x)	f ₀ / f'
4,5	4927	4937		1,0020
	4928	4963	x	
	4928	4935		1,0014
	4928	4939	x	
	4928	4938		1,0018
	4929	4955	x	
	4929	4941	x	
	4930	4936		1,0012
	4930	4937		1,0014
	4931	4950	x	
6	4933	5056	x	
	4934	4954		1,0041
	4934	4938		1,0008
	4934	4961		1,0055
	4934	5000		1,0134
	4934	4999		1,0132
	4934	5008	x	
	4935	5017	x	

7,5	4929	5010	x	
	4930	4997		1,0136
	4930	4997		1,0136
	4930	5003		1,0148
	4930	4998		1,0148
	4930	5006		1,0154
	4930	5016	x	
	4930	5007	x	
	4931	5098	x	
	4932	5021	x	
9	4934	4992		1,0118
	4934	5025	x	
	4934	5015		1,0164
	4935	5046	x	
	4935	5027	x	
	4934	4993		1,0120
	4934	4989		1,0111
	4934	4993		1,0120
	4934	5047	x	

Geschwindigkeiten

U in V	t in s	s in cm	gestr.
4,5	1,71	80	x
	1,57	80	
	1,55	80	
	3,19	80	x
	5,02	80	x
	1,92	80	x
	1,40	70	
	1,46	70	
	1,34	70	
	Ø s/t: 50,5 cm/s		
6*	2,17	70	x
	1,32	70	x
	1,37	70	x
	0,92	70	
	0,91	70	
	0,91	70	

U in V	t in s	s in cm	gestr.	
7,5	0,73	70		
	0,74	70	x	
	0,72	70		
	0,74	70	x	
	0,72	70		
	0,71	70		
	0,72	70		
	Ø s/t: 97,2 cm/s			
	9	0,65	70	
0,65		70		
0,63		70	x	
0,65		70		
0,81		70	x	
0,59		70	x	
0,64		70	x	

	0,90	70	
	1,80	70	x
Ø s/t: 76,9 cm/s			

	0,65	70	
Ø s/t: 107,7 cm/s			

* Bei 6 V nur vier Werte übrig, da der nächste Wert 1,32 s sehr stark von den anderen vier abweicht.

Messung Versuchsaufbau 2.2

Frequenzen

U in V	f ₀ in Hz	f' in Hz	gestrichen (x)	f ₀ / f'
4,5	1499	1462		0,9753
	1498	1433		0,9566
	1499	1427		0,9520
	1499	1417	x	
	1499	1433		0,9560
	1499	1458		0,9726
6	1497	1458		0,9739
	1496	1430		0,9559
	1496	1402		0,9372
	1497	1355	x	
	1497	1375	x	
	1497	1396		0,9325
	1497	1326	x	
	1497	1455		0,9719
7,5	1497	1402		0,9365
	1498	1410		0,9413
	1498	1370	x	
	1498	1416		0,9452
	1498	1382		0,9226
	1499	1395		0,9306

Geschwindigkeiten

U in V	t in s	s in cm	gestr.
4,5	1,00	50	
	1,03	50	
	0,99	50	
	0,94	50	
	0,98	50	
	0,92	50	x

U in V	t in s	s in cm	gestr.
7,5	0,75	70	
	0,76	70	
	0,75	70	
	0,76	70	
	0,73	70	x
	0,75	70	

	Ø s/t: 50,6 cm/s		
6	1,00	70	x
	0,96	70	
	0,92	70	
	0,95	70	
	0,90	70	x
	0,91	70	
	0,93	70	
	1,00	70	x
	Ø s/t: 74,9 cm/s		

	Ø s/t: 92,8 cm/s
--	------------------

Erklärung über die selbstständige Anfertigung der Arbeit

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst sowie alle verwendeten Hilfsmittel angegeben habe. Insbesondere versichere ich, dass ich alle wörtlichen und sinngemäßen Übernahmen aus anderen Werken als solche gekennzeichnet habe.

Idar-Oberstein, 20.04.2007
